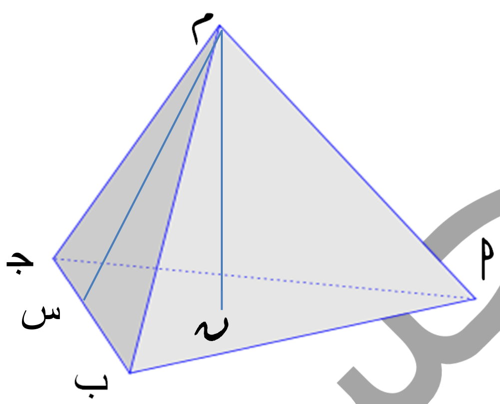
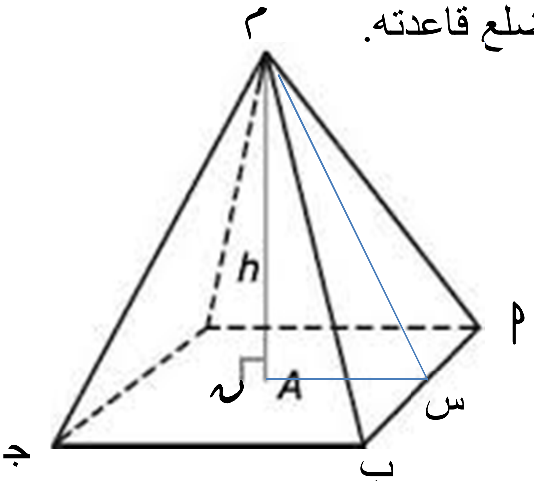
الهرم والمخروط
Pyramid and Cone

الهرم Pyramid :

هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا ...حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته.



هرم ثلاثى قاعدته على شكل مثلث



هرم رباعى قاعدته على شكل مضلع رباعى

إرتفاع الهرم (م ن) :

هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته.

الارتفاع الجانبى(م س):

هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته.

المضلع المنتظم:- **هومضلع**

١ ـ أضلاعه متساوية الطول

٢ ـ زواياه متساوية القياس

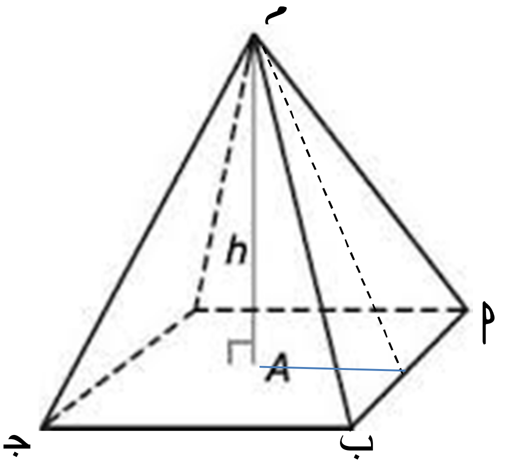
٣ـ مركزه هو مركزالدائرة المرسومة داخله أو خارجه

حالات خاصة من الهرم

(١) الهرم القائم *Right pyramid*

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

(٢) الهرم المنتظم :-



هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم
مركزه موقع العمود المرسوم
من رأس الهرم عليها.
أى أنه هرم قائم قاعدته مضلع منتظم .

خواص الهرم المنتظم :-

١ـ أحرفه الجانبية متساوية الطول.

٢ـ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.

٣ـ الارتفاعات الجانبية متساوية .

ملاحظة هامة

المستقيم العمودى من رأس الهرم على مستوى قاعدته يكون عموديًا على أى مستقيم فيها.

علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون :

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

مثلا في الهرم الرباعى يكون :

عدد الأوجه = ٥ أوجه ، عدد الرووس = ٥ رووس، عدد الأحرف = ٨ أحرف

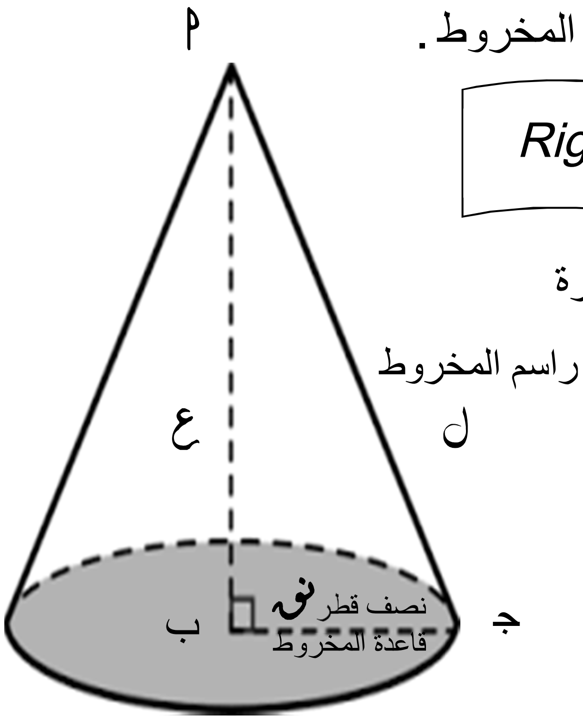
عدد الأوجه + عدد الرووس = ٥ + ٥ = ١٠

عدد الأحرف + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠

∴ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

المخروط Cone

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته والتى يعرف كل منها براسم المخروط .



المخروط الدائرى القائم *Right circular cone*

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.

خواص المخروط

١- محوره يكون عموديا على مستوى القاعدة .

٢- إرتفاعه هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط ومركز قاعدته وهو دائما أقل من راسم المخروط

إرتفاع المخروط $ع = \sqrt{ل^٢ - نق^٢}$

تذكر



مساحة الدائرة = π نق^٢

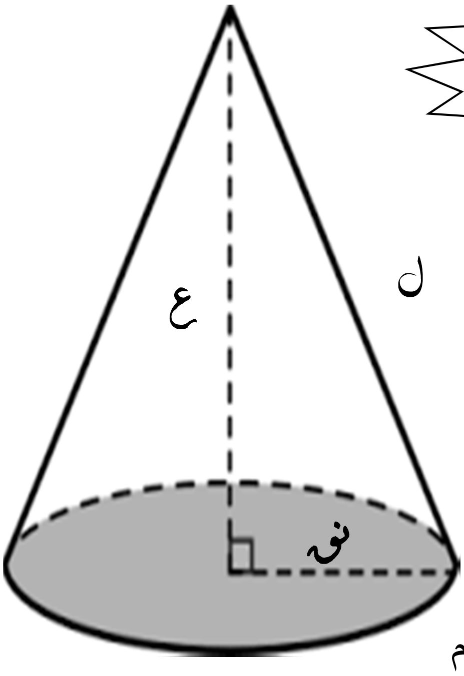
محيط الدائرة = ٢π نق

مثال ١



وزارة أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم إرتفاعه ٢٤ سم، وطول راسمه ٢٦ سم .

الحل





ع = ٢٤ سم
ل = ٢٦ سم
نق = ؟

طول نصف قطر قاعدة المخروط :

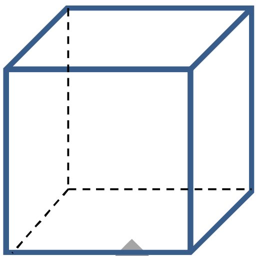
نق = $\sqrt{ل^{2} - ع^{2}} = \sqrt{٢٦^{2} - ٢٤^{2}} = ١٠$ سم

محيط قاعدة المخروط = ٢π نق = $٢\pi \times ١٠ = ٢٠\pi$ سم

مساحة قاعدة المخروط = π نق^{2} = $\pi \times (١٠)^{2} = ١٠٠\pi$ سم^{2}

شبكة المجسمات

تستخدم شبكة المجسمات فى تصنيع المجسم وذلك بتخطيط شكل المجسم على سطح مستوى ثم طى هذا السطح لتكوين المجسم المطلوب .



١- شبكة المكعب:-

أ- المكعب له ٦ أوجه متطابقة وكل وجه على شكل مربع.

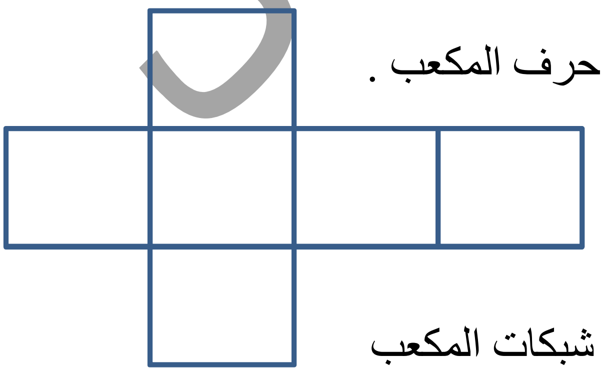
ب- عدد أحرفه ١٢ أحرف .

جـ - يحتوى على ٨ رؤوس .

ء- المساحة الكلية للمكعب = ٦ل^{2} حيث ل طول حرف المكعب .

هـ- المساحة الجانبية للمكعب = ٤ل^{2}

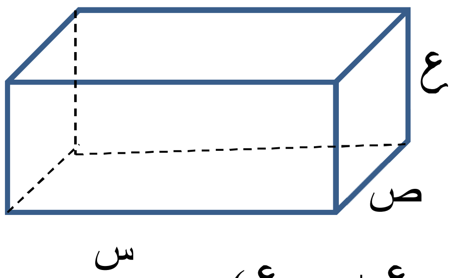
و- حجم المكعب = ل^{3}



إحدى شبكات المكعب

٢– شبكة متوازى المستطيلات:-

ﺃ– متوازى المستطيلات له ٦ أوجه كل منها على مستطيل أو مربع بحيث يكون كل وجهين متقابلين متطابقين.



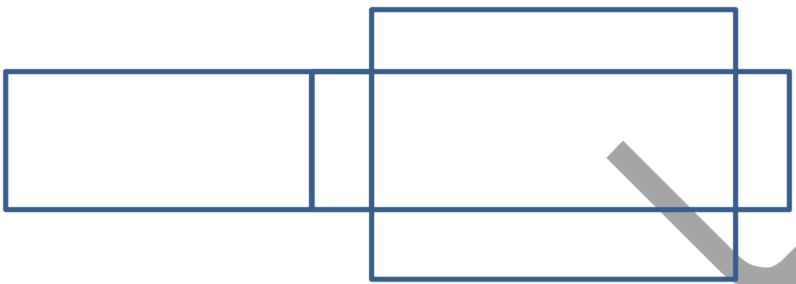
ب – عدد أحرفه ١٢ أحرف .

جـ – يحتوى على ٨ رؤوس .

ء– المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات = ٢(س ص + ص ع + س ع)

هـ – حجمه = حاصل ضرب ابعاده الثلاثة = س ص ع

حيث س ، ص ، ع أبعاد متوازى المستطيلات



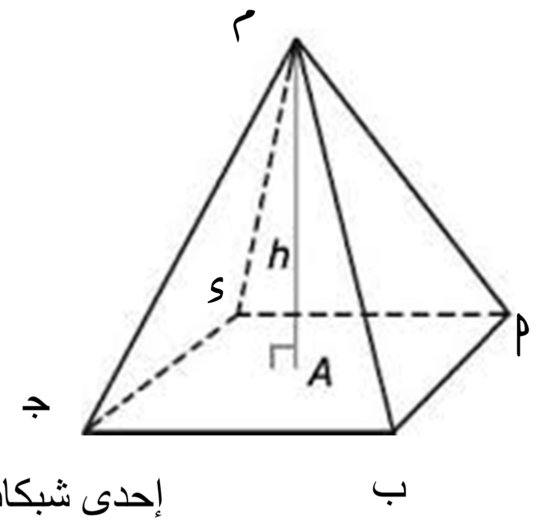
إحدى شبكات متوازى المستطيلات

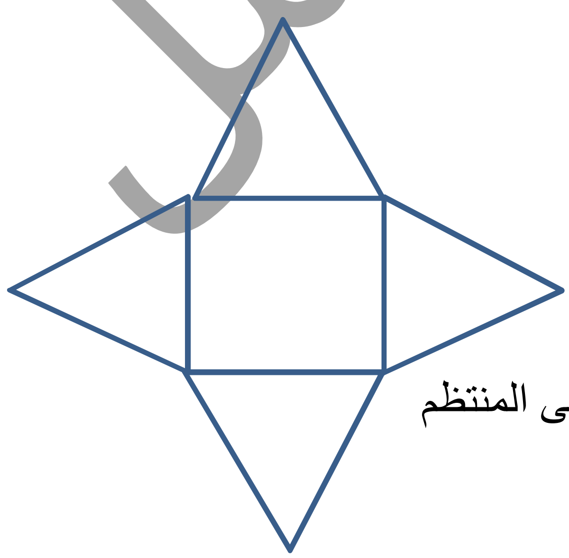
٣– شبكة الهرم الرباعى المنتظم:-

ﺃ– عدد الأوجه = ٥ أوجه منهم ٤جانبية ووجه واحد للقاعدة .

ب – عدد الأحرف = ٨ منهم ٤ أحرف جانبية .

ج – عدد الرؤوس = ٥ ومنهم رأس واحدة م رأس الهرم .



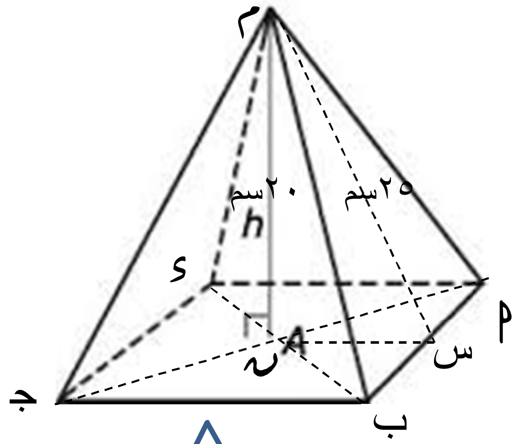


إحدى شبكات الهرم الرباعى المنتظم

مثال٢



م ٩ب جـ ء هرم رباعى منتظم إرتفاعه ٢٠ سم، وإرتفاعه الجانبى ٢٥ سم .
أوجد طول ضلع قاعدة الهرم، وارسم شكلاً يوضح إحدى شبكاته.



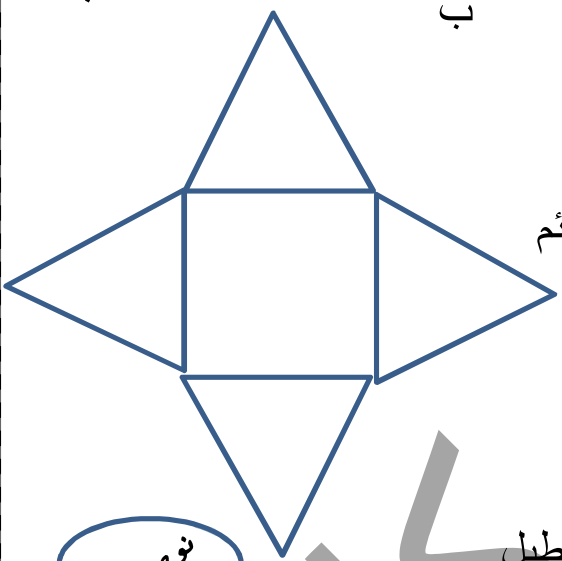
من نظرية فيثاغورث :-

س ن = $\sqrt{٢٥^{٢} - ٢٠^{٢}}$ = ١٥سم

في Δ ٩ب جـ :

∵ س منتصف $\overline{٩ب}$ ، ن منتصف $\overline{٩جـ}$

∴ ب جـ = ٢ x ١٥ = ٣٠ سم



إحدى شبكات الهرم الرباعى القائم

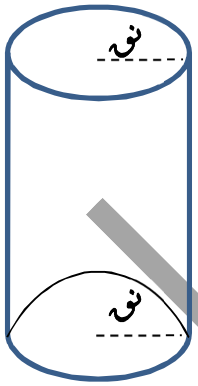
٤– شبكة الأسطوانة:-

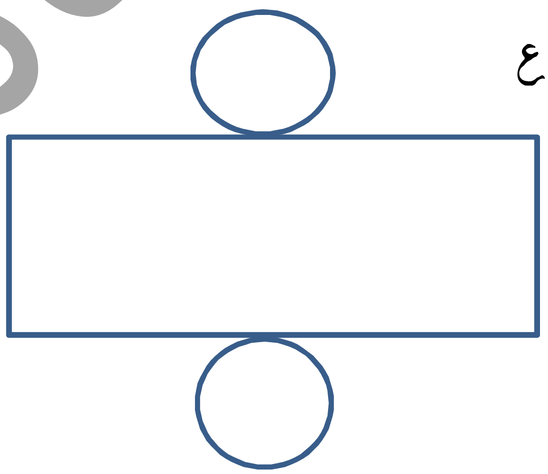
٩ – قاعدتى الأسطوانة على شكل دائرتين متطابقتين .

ب – السطح الجانبى للأسطوانة قبل طيه على شكل مستطيل .

جـ – المساحة الكلية الأسطوانة = ٢ π نو^{٢} + ٢ π نو ع

ء – حجم الأسطوانة = π نو^{٢} ع





شبكة الأسطوانة

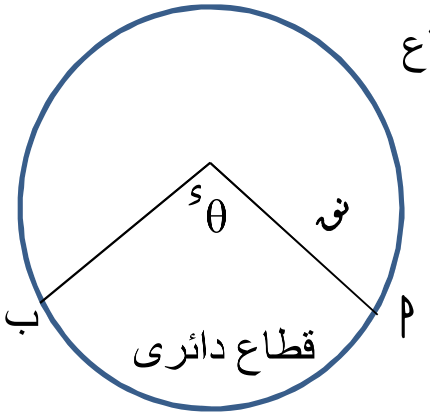
❁تـــذكـــر

القطاع الدائرى :- هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفى قطرين وقوس من الدائرة .

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

❁ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق حيث ل طول قوس القطاع

❁ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ θء نق^{٢}



حيث θء القياس الدائرى لزاوية القطاع .

❁ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س}{٣٦٠}$ x π نق^{٢} = $\frac{س}{٣٦٠}$ x مساحة الدائرة

حيث س القياس الستينى لزاوية القطاع .

❁ طول قوس القطاع الدائرى ل = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ x محيط الدائرة = $\frac{س}{٣٦٠}$ x ٢ π نق

❁ عند طى القطاع الدائرى نحصل على مخروط دائرى قائم :

١ـ محيط دائرته يساوى طول قوس القطاع.

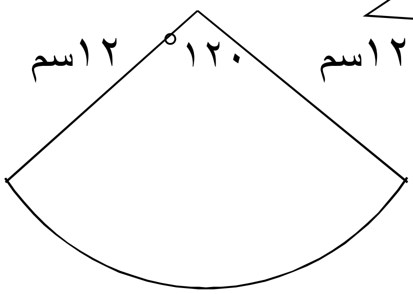
٢ـ طول راسمه يساوى طول نصف قطر دائرة القطاع الدائرى .

مثال٣



قطاع دائرى من الورق طول نصف قطر دائرته ١٢ سم وقياس زاويته المركزية ١٢٠° طوى وحول إلى مخروط دائرى قائم أوجد إرتفاع المخروط .

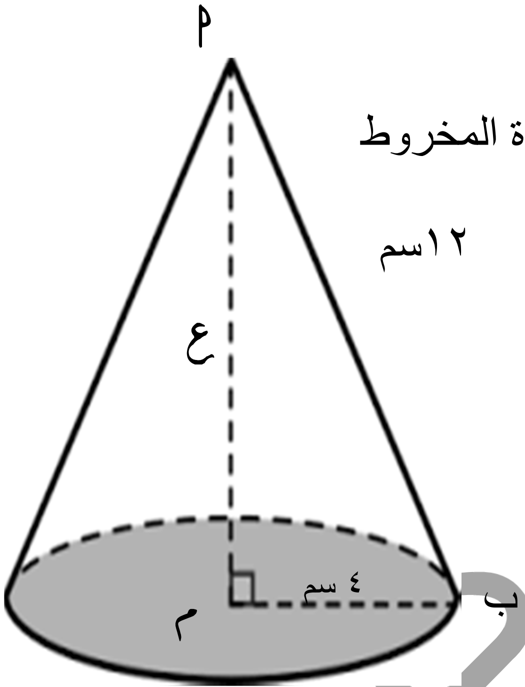
الحل



طول قوس القطاع الدائرى = $\frac{\text{س}}{٣٦٠} \times ٢ \, \pi$ نق

= $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \pi \times ١٢$

= ٨ π سم وهو يمثل محيط قاعدة المخروط



محيط دائرة المخروط = ٨ π سم

٢ π نق م = ٨ π

نق م = ٤ سم

من نظرية فيثاغورس فى Δ م ب م

إرتفاع المخروط ع = $\sqrt{١٢^٢ - ٤^٢}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

تمارين(٦)

١ أكمل ما يأتى :-

١- الأوجه الجانبية فى الهرم المنتظم ....

٢- الارتفاعات الجانبية فى الهرم المنتظم ....

٣- المستقيم العمودى من رأس الهرم على مستوى قاعدته يكون عموديا على ....

٤- ارتفاع المخروط القائم .... طول راسمه.

٥- المخروط الدائرى القائم ينشأ من دوران .... حول ....

==

٢ في الهرم الخماسى المنتظم :

١- ما عدد الأوجه الجانبية ؟ ٢- ما عدد الأوجه ؟

٣-ماعدد الأحرف الجانبية ؟ ٤- ما عدد أحرفه ؟ [٥ ، ٦ ، ٥ ، ١٠]

==

٣ م ٮ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم ، إرتفاعه ١٢سم أوجد إرتفاعه الجانبى . [١٣ سم]

==

٤ م ٮب جـ ء رباعى منتظم إرتفاعه ٢٤سم وإرتفاعه الجانبى ٢٥ سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم [١٤سم]

==

٥ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وإرتفاعه ١٥ سم أوجد طول نصف قطر دائرته. [٨ سم]

==

٦ أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم إرتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٣ سم [١٠π سم ، ٢٥π سم^{2}]